Difusividad Térmica

OBJETIVOS:

- Diseñar un experimento para generar y observar ondas térmicas en una barra.
- A partir de la caracterización de las ondas térmicas, determinar el coeficiente de difusividad térmica del material de la barra.

CONCEPTOS NECESARIOS PARA LA PRÁCTICA:

- Conducción de calor
- Ondas

INTRODUCCIÓN BREVE

Cuando la temperatura de un sistema no es uniforme, existe flujo de calor desde las zonas más calientes hacia las más frías. La transferencia de calor se puede llevar a cabo mediante tres mecanismos:

Conducción: transmisión de calor por contacto sin transferencia de materia. Choques elásticos (fluidos), difusión de electrones (sólidos conductores), y/o fonones (sólidos aislantes).
Convección: transmisión de calor por la transferencia de la propia materia portadora del calor (fluidos).
Radiación: transmisión de energía por medio de la emisión de ondas electromagnéticas o fotones.

En los sólidos no se produce la transferencia de calor por convección y la transmisión por radiación es despreciable.

La ley de la conducción del calor, también conocida como ley de Fourier, establece que la tasa de transferencia de calor a través de un material es proporcional al gradiente negativo de la temperatura y al área, en ángulo recto con ese gradiente, por la que fluye el calor. Esta ley se puede expresar de dos formas equivalentes: la forma integral, en la que se considera la cantidad de energía que entra o sale de un cuerpo en su conjunto, y la forma diferencial, en la que se consideran los flujos de energía a nivel local.

La ley de Newton del enfriamiento es un análogo discreto de la ley de Fourier, mientras que la ley de Ohm es el análogo eléctrico de la ley de Fourier y las leyes de Fick de la difusión son su análogo químico.

La forma diferencial de la ley de Fourier de la conducción térmica muestra que la densidad de flujo de calor local $\boldsymbol{q}$ es igual al producto de la conductividad térmica κ y el gradiente de temperatura local negativo $-\nabla T$:

$$\boldsymbol{q} = -\kappa \nabla T$$

En unidades del SI, $\boldsymbol{q}$ es el flujo de calor en $\mathrm{W/m^2}$, κ es la conductividad térmica del material en $\mathrm{W/(m\ K)}$, y ∇T es el gradiente de temperatura en $\mathrm{K/m}$.

La conductividad térmica κ suele tratarse como una constante, aunque esto no siempre es cierto. La conductividad térmica de un material generalmente varía con la temperatura, aunque la variación puede ser pequeña en un rango significativo de temperaturas para algunos materiales comunes. En los materiales anisótropos, la conductividad térmica varía típicamente con la orientación; en este caso $\boldsymbol{\kappa}$ se representa por un tensor de segundo orden. En los materiales no uniformes, κ varía con la ubicación espacial.

Para muchas aplicaciones simples, la ley de Fourier se utiliza en su forma unidimensional, por ejemplo, en la dirección x:

$$q_x = -\kappa \frac{dT}{dx}$$

La ley de Fourier conduce a la ecuación del calor. Sigamos con el problema de conducción térmica unidimensional, considerando $u(x,t)$ la energía interna por unidad de volumen en cada punto e instante. En ausencia de generación de calor por fuentes internas o externas, la variación de $u(x,t)$ en el tiempo es proporcional a la variación de temperatura en el tiempo:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = C_p \rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

Dónde la constate de proporcionalidad es el producto de la capacidad calorífica a presión constante C_p y la densidad ρ.
Aplicando la conservación de energía en un elemento infinitesimal centrado en x, se puede concluir que la tasa de acumulación de calor en el punto x es igual al negativo de la derivada del flujo de calor en ese punto:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial q_x(x,t)}{\partial x}$$

Combinando las ecuaciones de arriba se deduce la ecuación de difusión (conducción) de calor, en este caso en 1 dimensión.

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{C_p \rho} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

Donde $\alpha = \frac{\kappa}{C_p \rho}$ se conoce como difusividad térmica.

DESARROLLO EXPERIMENTAL Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Se propone el estudio de la difusividad térmica en una barra metálica en la configuración de la

Figura 1.

En un extremo de la barra se aplicará una fuente de calor intermitente. En consecuencia, el incremento de temperatura sobre la temperatura ambiente en ese extremo de la barra puede aproximarse como una función cuadrada periódica, que a su vez puede aproximarse como la siguiente serie de Fourier:

$$\Delta T(0,t) = \frac{T_0}{2} + \frac{2T_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n t/\tau) \tag{2}$$

donde τ es el período del calentamiento y T_0 es la temperatura máxima sobre temperatura ambiente que dependerá de la potencia del calentador y las propiedades de la barra, los contactos térmicos y aislaciones.

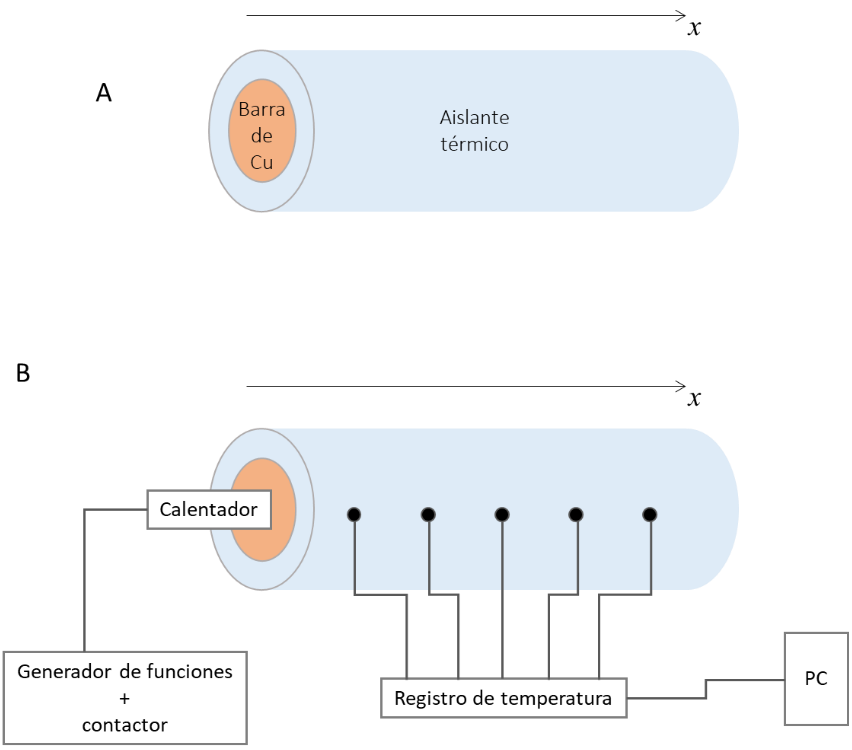

Figura 1: A) Esquema de la barra de cobre aislada radialmente para estudiar la conducción de calor a lo largo de la barra (dirección x). B) Esquema del arreglo experimental. Un calentador se pone en contacto térmico con un extremo de la barra. El calentador es controlado por un generador de funciones que lo enciende y apaga de manera periódica. La temperatura de la barra se monitorea en diferentes posiciones.

Se supondrá que la onda térmica generada decae completamente en la barra, y que la temperatura en el otro extremo es constante

$$\Delta T(L,t) = 0 \tag{3}$$

Para el estado estacionario, se propone una solución en forma de serie de Fourier del tipo:

$$\Delta T(x,t) = \frac{T_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)\sin(\omega_n t - k_n x) \tag{4}$$

Donde A_n, ω_n, y k_n son la amplitud, frecuencia y número de onda del harmónico n.

Metiendo la ecuación (4) en la ecuación de ecuación de difusión (conducción) de calor (1), y teniendo en cuenta las condiciones de borde (2) y (3), se obtiene que

$$\Delta T(x,t) = \frac{T_0}{2} + \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} T_n e^{-\epsilon_n x}\sin(\omega_n t - \epsilon_n x) \tag{5}$$

Con $T_n = 2T_0/n\pi$, $\omega_n = 2n\pi/\tau$, y $\epsilon_n = \sqrt{\omega_n/(2\kappa)}$ es el coeficiente de amortiguamiento del n-ésimo harmónico. Como ϵ_n aumenta con n, los harmónicos superiores decaen más rápido, y la temperatura de la barra en puntos suficientemente lejanos al origen puede aproximarse bien por el primer harmónico.

$$\Delta T(x,t) \cong \frac{T_0}{2} + 2T_0/\pi\, e^{-\epsilon x} \cos[\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{\nu}\right)] \tag{6}$$

Donde se elije un nuevo origen, donde vale la aproximación de un solo harmónico y donde la amplitud es máxima. Vemos que la solución implica una oscilación de la temperatura en el tiempo con período τ y en el espacio con longitud de onda $\lambda = \nu\tau$.
Considerando la ecuación (6) y la (5), podemos obtener:

$$\kappa_\epsilon = \pi/(\tau\epsilon^2) \tag{7}$$

$$\kappa_\upsilon = \nu^2\tau/(4\pi) \tag{8}$$

Que proporcionan dos maneras de obtener la difusividad térmica de la barra, κ, a partir de las dos propiedades de la onda térmica: su velocidad ν, y su coeficiente de decaimiento, ϵ, que se determinan experimentalmente. Si bien la difusividad térmica del material es una sola, se ha visto que su determinación a partir de ν o ϵ puede dar resultados diferentes en presencia de pérdidas de calor[1]. Pero afortunadamente, si consideramos que κ_ϵ y κ_υ son, y combinamos (7) y (8) calculando ϵ/ν se obtiene una expresión para el coeficiente de difusividad térmica que combina las dos propiedades de la onda simultáneamente y que no depende de la presencia de pérdidas[1]:

$$\kappa_\upsilon = \nu/(2\epsilon) \tag{9}$$

El coeficiente de decaimiento y la velocidad de la onda pueden medirse a partir de las oscilaciones de la temperatura en distintos puntos de la barra.

PREGUNTAS PARA EL MINI EXAMEN PREVIO A LA PRÁCTICA:

1- Explique qué mecanismos existen para la transferencia de calor

2- ¿Cuál es la ley de difusión de calor? ¿En qué condiciones se aplica?

3- Brinde 3 ejemplos tecnológicos donde es clave conocer, calcular o predecir la conducción de calor

4- ¿Cómo funciona una termocupla?

Referencias

(1) Parrott, J. E.; Stuckes, A. D. Thermal Conductivity of Solids; Pion: London, 1975; pp 24–28.