

Capítulo 4

Fenómenos transitorios eléctricos

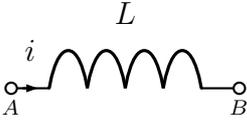
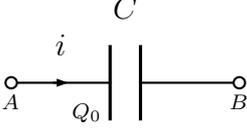
4.1. Introducción

Cuando al menos uno de los componentes de un circuito eléctrico cambia alguna de sus propiedades, se inicia una etapa en la que también se modifican las variables que describen el estado del circuito (corrientes de ramas o mallas, o diferencias de tensión entre nodos), tendiendo hacia un estado de equilibrio compatible con dicho cambio. Los cambios que con mayor frecuencia se estudian en los cursos de Electricidad y Magnetismo son debidos a la apertura o cierre de llaves eléctricas. Pero también pueden considerarse modificaciones bruscas de los valores de resistencias, capacitores, inductancias y/o fuentes que lo compongan.

Mientras las variables eléctricas evolucionan hacia el equilibrio, se dice que el circuito se encuentra en *estado* o *régimen transitorio*. Si no ocurren nuevos cambios, finalmente se alcanza el denominado *estado*, o *régimen, estacionario*. La frontera entre ambos estados es difusa, pero como se verá, pueden establecerse criterios cuantitativos basados en los valores de los componentes circuitales, que permiten distinguir, convencionalmente, entre ambos.

4.2. Descripción matemática

Las correspondientes caídas de tensión, ΔV_R , ΔV_L y ΔV_C , en función del tiempo en los elementos R , L y C , se modelan según se indica en el siguiente cuadro,

	$\Delta V_R \equiv V_B - V_A = -i R$
	$\Delta V_L \equiv V_B - V_A = -L di/dt$
	$\Delta V_C \equiv V_B - V_A = -\frac{Q_0}{C} - \frac{1}{C} \int i dt$

donde se asumió que la corriente inicialmente circulante por la bobina es nula. Nótese que se ha considerado que la carga inicial del capacitor, Q_0 , es la correspondiente a la placa del mismo por la que se considera que ingresa la corriente i .

- Ejemplo:** La corriente $i(t)$ circulante por un circuito como el de la figura 4.1, en el que se asume que la llave se cierra en el instante $t = 0$, se modela de la siguiente manera: $i(t) = 0 \forall t < 0$, y luego del cierre de la llave satisface la siguiente ecuación íntegro-diferencial

$$V_0 = i R + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt' + \frac{Q_0}{C} \quad t > 0 \quad (4.1)$$

que debe ser complementada con las condiciones iniciales correspondientes al circuito bajo estudio.

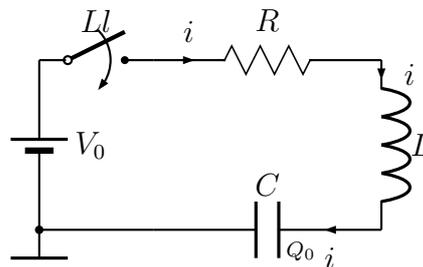


Figura 4.1: Circuito RLC serie en régimen transitorio. La llave se cierra en el instante $t = 0$.

A continuación se analizarán los casos particulares de transitorios en circuitos RC, RL y RLC serie.

4.2.1. Transitorios en circuitos RC

Cuando se tiene un circuito RC como el de la figura 4.2, la ecuación (4.1) se reduce a la ecuación integral

$$V_0 = iR + \frac{1}{C} \int_0^t i dt' + V_C(0) \quad t > 0 \quad (4.2)$$

siendo $V_C(0) = \frac{Q_0}{C}$. Diferenciando la ecuación (4.2) respecto del tiempo se obtiene la ecuación diferencial:

$$0 = R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i \quad t > 0 \quad (4.3)$$

La condición inicial surge trivialmente de la ecuación (4.2), y resulta

$$i(0) = \frac{V_0 - V_C(0)}{R} \quad (4.4)$$

Resolviendo la ecuación (4.3) con la condición inicial (4.4), se llega a

$$\boxed{i(t) = \frac{V_0 - V_C(0)}{R} e^{-t/RC}} \quad (4.5)$$

El intervalo temporal RC se denomina convencionalmente *tiempo característico del transitorio RC*, y habitualmente se lo denota con el símbolo τ . En el caso que nos ocupa, $\boxed{\tau = RC}$ corresponde al instante en el que la corriente se reduce a $e^{-1} \approx 0,37$ de su valor inicial. Expresado con otras palabras: $i(\tau)$ es, aproximadamente, el 37% de $i(0)$.

De la ecuación (4.5) se desprende que la caída de tensión en el capacitor es

$$\boxed{V_C(t) = V_C(0) + [V_0 - V_C(0)] (1 - e^{-t/RC})} \quad (4.6)$$

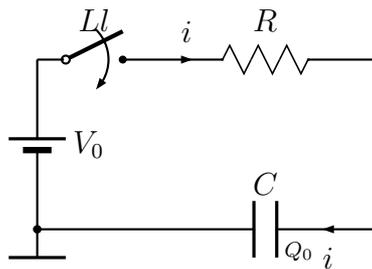


Figura 4.2: Circuito RC en régimen transitorio. La llave se cierra en $t = 0$.

4.2.2. Transitorios en circuitos RL

Cuando se tiene un circuito RL como el de la figura 4.3, la ecuación (4.1) se reduce a

$$V_0 = iR + L \frac{di}{dt} \quad t > 0 \quad (4.7)$$

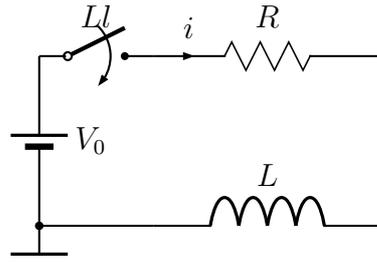


Figura 4.3: Circuito RC en régimen transitorio. La llave se cierra en $t = 0$.

con la condición inicial $i(0) = 0$; de donde resulta

$$i(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (4.8)$$

$$V_L(t) = V_0 e^{-t/\tau} \quad (4.9)$$

siendo en este caso $\tau = L/R$ el tiempo característico del transitorio RL .

4.2.3. Transitorios en circuitos RLC serie

Un circuito RLC serie como el de la figura 4.1, puede describirse mediante la ecuación íntegro-diferencial (4.1), o bien mediante su diferencial

$$0 = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i \quad t > 0 \quad (4.10)$$

Planteando soluciones del tipo $i(t) \propto e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, resulta la ecuación característica

$$L \lambda^2 + R \lambda + \frac{1}{C} = 0 \quad (4.11)$$

cuyas raíces son

$$\lambda_{\pm} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \beta \quad (4.12)$$

donde se definió, para facilitar la notación,

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{y} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (4.13)$$

Considerando que tanto R como L y C son positivas, se pueden dar tres casos según sea el radicando $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = \alpha^2 - \omega_0^2$, positivo, nulo o negativo; dando lugar a su vez, a las soluciones denominadas *sobre-*, *crítica-* y *subamortiguadas*, respectivamente, que se verán a continuación.

Caso sobreamortiguado: $R > 2\sqrt{L/C}$

En este caso, la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas, y por lo tanto resulta

$$i(t) = A e^{(-\alpha+\beta)t} + B e^{(-\alpha-\beta)t} \quad (4.14)$$

siendo A y B dos constantes reales que dependen de las condiciones iniciales. Asumiendo que el capacitor esta inicialmente descargado resulta $i(0) = 0$ y $\left. \frac{di}{dt} \right|_0 = V_0/L$, lo que implica

$$A = -B \quad \text{y} \quad \frac{V_0}{L} = \left. \frac{di}{dt} \right|_0 = 2A\beta \quad (4.15)$$

por lo tanto se tiene

$$i(t) = \frac{V_0}{2L\beta} e^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \quad (4.16)$$

$$= \frac{V_0}{\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \frac{L}{C}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} t \right) \quad (4.17)$$

Caso críticamente amortiguado: $R = 2\sqrt{L/C}$

En este caso el discriminante del polinomio característico se anula ($\beta = 0$) y sus dos raíces colapsan en una sola de multiplicidad dos

$$\lambda_{\pm} = -\frac{R}{2L} = -\alpha \quad (4.18)$$

La solución de la ecuación homogénea es entonces

$$i(t) = A e^{-\alpha t} + B t e^{-\alpha t} \quad (4.19)$$

Aplicando las condiciones iniciales $i(0) = 0$ y $\left. \frac{di}{dt} \right|_0 = V_0/L$ se obtiene

$$A = 0 \quad \text{y} \quad B = \frac{V_0}{L} \quad (4.20)$$

luego resulta

$$i(t) = \frac{V_0}{L} t e^{-\alpha t} = \frac{V_0}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (4.21)$$

Caso subamortiguado: $R < 2\sqrt{L/C}$

En este caso se tiene

$$\lambda_{\pm} = -\alpha \pm j \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega \quad (4.22)$$

siendo j la unidad imaginaria: $j^2 = -1$, y $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Resulta entonces

$$i(t) = e^{-\alpha t} (A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{cos} \omega t) = D e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad D, \phi \in \mathbb{R} \quad (4.23)$$

Aplicando las condiciones iniciales $i(0) = 0$ y $\left. \frac{di}{dt} \right|_0 = V_0/L$ se obtiene

$$i(t) = \frac{V_0}{\omega L} e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega t) = \frac{V_0}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L} t} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right) \quad (4.24)$$

4.3. Transitorios en circuitos alimentados con ondas cuadradas

Es frecuente estudiar experimentalmente fenómenos transitorios en circuitos eléctricos alimentándolos con una onda cuadrada. Esto evita la necesidad de accionar manualmente una llave eléctrica.

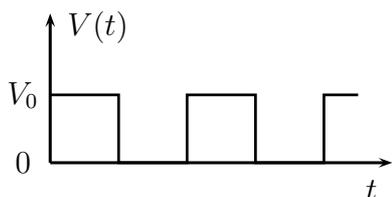


Figura 4.4: Representación temporal de una onda cuadrada que adopta los valores V_0 y 0.

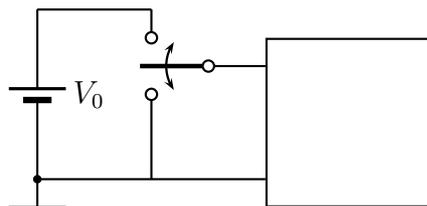


Figura 4.5: Una fuente de onda cuadrada alimenta a un circuito genérico.

La fuente de onda cuadrada tiene la representación gráfica en función del tiempo que se ilustra en la figura 4.4, y se comporta para el circuito como si fuese una fuente de tensión que alternativamente toma los valores V_0 y 0. Ver la figura 4.5.

Tenga presente que mediante el control de “offset” (corrimiento de cero) de la fuente se puede modificar el valor medio de la onda cuadrada (ver figura 4.6), lo que corresponde a una disposición experimental como la ilustrada en la figura 4.7.

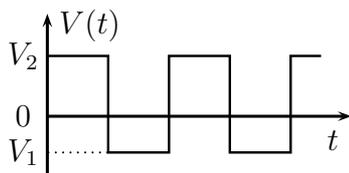


Figura 4.6: Representación temporal de una onda cuadrada de valor medio arbitrario.

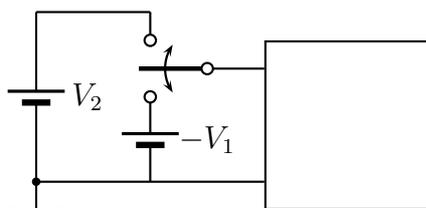


Figura 4.7: Una fuente de onda cuadrada alimenta a un circuito genérico.

4.4. Preguntas

1. Uno cualquiera de los circuitos estudiados en este Capítulo se alimenta con una onda triangular. Cree que se producirán transitorios?
2. Cree que un circuito en régimen transitorio puede presentar más de un tiempo característico?
3. Considere la simulación cuyo esquema se presenta en la figura 4.8, en la que una fuente de onda cuadrada que adopta los niveles 0 o 1 V con un semiperíodo de 1 ms, alimenta a un circuito serie RC de valores $R = 1 \text{ k}\Omega$ y $C = 1 \mu\text{F}$ ($\tau = RC = 1 \text{ ms}$). El capacitor está inicialmente descargado y la fuente se conecta en el instante $t = 0$, cuando ésta inicia un segmento de 1 V de tensión de salida.

En la figura 4.9 se presenta el resultado de simular, en función del tiempo, la tensión aplicada por la fuente (trazo a rayas) y la correspondiente caída de tensión sobre la resistencia (trazo lleno).

Se observan al menos dos detalles curiosos: a) durante ciertos lapsos la caída de tensión en la resistencia adopta valores negativos, a pesar de que la fuente sólo aplica tensiones positivas o nulas. b) la tensión pico a pico sobre la resistencia es mayor que la tensión pico a pico que aplica la fuente. Es incorrecta la simulación?. Justifique su respuesta.

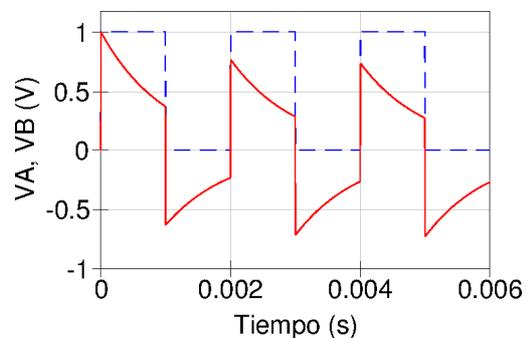
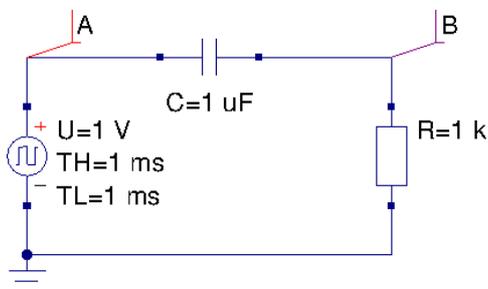


Figura 4.8: Esquema correspondiente a una simulación de un circuito RC alimentado por una fuente de tensión cuadrada (pregunta 3).

Figura 4.9: Un resultado de la simulación del circuito esquematizado en la figura 4.8, en el que se ilustran la tensión aplicada por la fuente, V_A , en trazo a rayas, y la caída de tensión sobre la resistencia, en trazo lleno.

4.5. Parte computacional

1. Simule al menos uno de los circuitos estudiados y compare los resultados de la simulación con los esperados a partir de las deducciones formuladas más arriba.

2. Pruebe ahora con ondas cuadradas de diferentes valores medios, y de períodos menores, iguales y mucho mayores que los respectivos tiempos característicos. Interprete los resultados.

4.6. Parte experimental

4.6.1. Transitorios RC

En esta sección se estudiará el proceso de carga y descarga de un capacitor a través de una resistencia. Para ello se plantea el problema de verificar experimentalmente todas las características de la curva $i(t)$ correspondientes a dicho proceso. Para lograr el objetivo se debe tener presente que entre las principales propiedades a verificar se encuentran:

1. La curva $i(t)$ es exponencial.
2. Circuitos con igual constante de tiempo presentan curvas $i(t)$ proporcionales entre sí.
3. Las constantes de proporcionalidad están relacionadas directamente con la tensión de carga V_0 .

A esta lista puede agregarse cualquier otra propiedad que se considere de interés destacar.

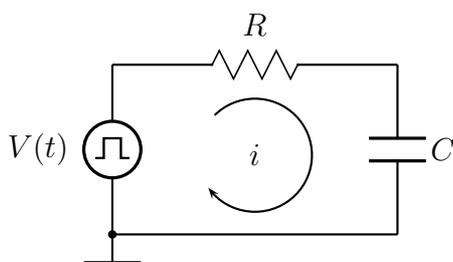


Figura 4.10: Una fuente de onda cuadrada alimenta a un circuito RC.

Considere el circuito de la figura 4.10. Trabajando con el osciloscopio en modo $Y(t)$ y conectando la punta de medición sobre el capacitor, se podrá observar la tensión $V_C(t)$ en este elemento durante su carga y descarga. Antes de efectuar la medición debe pensarse sobre cuál de los terminales del capacitor se va a conectar cada uno de los extremos de la punta. Observe que las 2 posibilidades de conexión no son equivalentes entre sí y que sólo una de ellas es la correcta.

Teniendo en cuenta las ecuaciones que modelan los procesos que se desean observar ¿qué tipos de curvas se esperan ver?. ¿Se modificarán al cambiar la constante RC del circuito?

Experimente con diversos valores de RC pero manteniendo siempre $R > 100 \Omega$. ¿Por qué no se debe pasar de un valor mínimo para R ? ¿Qué sucede si $R = 0$?

En caso de que se observen cambios significativos al variar la constante RC , grabe las formas de onda que considere de interés informar. En el informe deberá constar la interpretación que el grupo haga de los diferentes casos mostrados.

Utilizando ahora el circuito de la figura 4.11 mida la tensión sobre la resistencia, V_R , que obviamente por la ley de Ohm resulta proporcional a la corriente que circula por el circuito.

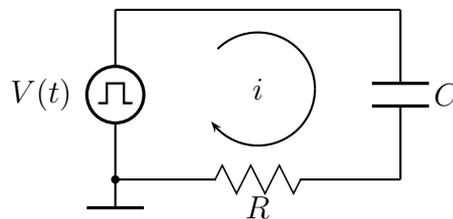


Figura 4.11: Circuito adecuado para sensar la corriente mediante un osciloscopio, pero no para sensar, con dicho instrumento, la caída de tensión sobre el capacitor.

Para este caso caben todas las consideraciones y preguntas formuladas en la medición de $V_C(t)$, en particular se deberá volver a tener en cuenta cómo conectar la punta de medición. A diferencia del caso anterior, en esta oportunidad bastará con que se grabe una forma de onda típica, que a juicio del grupo ejemplifique el comportamiento de $V_R(t)$.

Observe que desde el punto de vista de las ecuaciones que modelan el comportamiento de los circuitos de las figuras 4.10 y 4.11, ambas disposiciones experimentales son equivalentes. Luego, a igualdad de condiciones iniciales, las corrientes circulantes por ambos circuitos y las caídas de tensión sobre los diversos elementos que los componen serán respectivamente iguales. En las condiciones del trabajo de esta práctica puede suponerse que las condiciones iniciales son iguales. Esto significa que la corriente circulante es la misma ya sea que se trate del circuito de la figura 4.10 o el de la 4.11. Lo propio ocurre con las caídas de tensión en los distintos elementos de ambos circuitos. Entonces, si el objetivo es medir $V_R(t)$ y $V_C(t)$ ¿por qué se deben utilizar disposiciones experimentales diferentes? Desde el punto de vista de la realización de la experiencia sería más “práctico” efectuar las mediciones sobre un solo circuito, por ejemplo el de la figura 4.10. ¿por qué no se mide $V_R(t)$ en el circuito de la figura 4.10?

4.6.2. Transitorios RL

Carga y descarga de una bobina a través de una resistencia

Arme un circuito como el de la figura 4.12 y estudie experimentalmente las propiedades de la caída de tensión sobre la bobina, V_L , y la corriente i . Determine si existe un tiempo

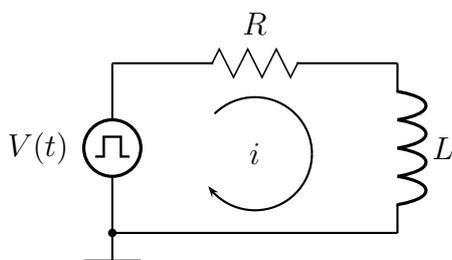


Figura 4.12: Una fuente de onda cuadrada alimenta a un circuito RL .

característico, y en caso afirmativo, mézalo y compárelo con los valores nominales del circuito bajo estudio. Analice comparativamente las propiedades de los circuitos RC y RL .

4.6.3. Transitorios RLC serie

Arme un circuito como el de la figura 4.13 e investigue sus propiedades.

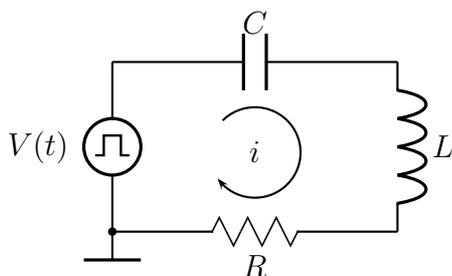


Figura 4.13: Una fuente de onda cuadrada alimenta a un circuito RLC serie.

Estudie experimentalmente los casos sub-, sobre-, y críticamente amortiguados.

2019

César Moreno, Departamento de Física-FCEyN-UBA e INFIP-CONICET.