Determinación del módulo de Young

OBJETIVOS:

- Determinar el módulo de Young de diversos materiales a partir de la flexión estática y dinámica de una varilla en voladizo
- Medición de señales luminosas. Manejo de láser, cámaras y fotodetectores.
- Adquisición y tratamiento de datos variables en el tiempo. Visualización del criterio de Nyquist y el fenómeno de aliasing.

CONCEPTOS NECESARIOS PARA LA PRÁCTICA:

- Deformación elástica, módulo de Young
- Difracción de luz en una rendija
- Modos espaciales de un láser

INTRODUCCIÓN BREVE:

La elasticidad es la capacidad de los materiales de deformarse de manera reversible, e.d. de recuperar su tamaño y su forma cuando se quitan las fuerzas que producen las deformaciones. El comportamiento elástico se encuentra en mayor o menor medida en todos los cuerpos sólidos. Si la fuerza es suficientemente pequeña, el desplazamiento relativo de los diferentes puntos del material es además proporcional a la tensión aplicada (fuerza por unidad de área transversal).

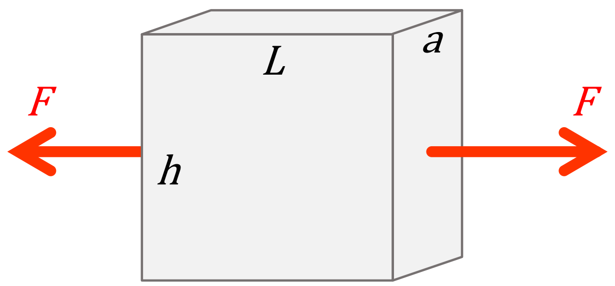

Figura 1. Estiramiento de una barra rectangular sometida a una tensión uniforme de tracción.

Por ejemplo, si se toma un bloque rectangular de longitud L, ancho a y altura h, como el de la figura 1, y se le aplica entre los extremos una fuerza F, la longitud aumenta una cantidad $\Delta\mathrm{L}$ siguiendo la ley de Hooke:

$$\frac{F}{A} = \mathrm{E}\,\frac{\Delta\mathrm{L}}{L} \tag{1}$$

donde A es el área transversal del bloque ($A = \mathrm{ah}$), y E es una propiedad natural del material, conocida como módulo de Young. La elongación es proporcional a F y a la longitud inicial del material, e inversamente proporcional al área transversal del bloque. Esto es porque se supone que la fuerza, y las deformaciones, se distribuyen en todos el volumen del cuerpo. La aplicación de la ecuación (1) en modo diferencial a regiones microscópicas de un cuerpo, permite el cálculo de deformaciones elásticas complejas.

En esta práctica, se determinará el módulo de Young de distintos materiales, midiendo la flexión de una varilla cilíndrica en voladizo, al aplicarle distintas fuerzas en su extremo libre como la que se muestra esquemáticamente en la figura 2a.

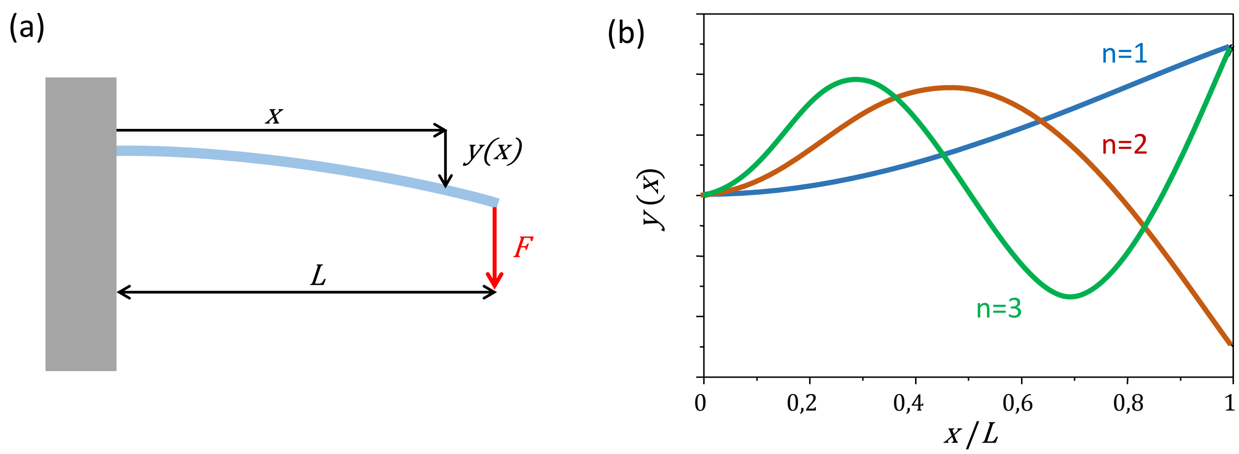

Figura 2. (a) Varilla en voladizo flexionada debido a la fuerza F en el extremo libre. (b) Tres primeros modos de oscilación de la varilla.

Con el sistema de coordenadas de la figura 2a, y dentro del régimen de deformaciones elásticas, se puede calcular la flexión de una varilla cilíndrica en voladizo con la siguiente expresión:

$$y(x) = \frac{32}{\pi d^4}\frac{F}{\mathrm{E}}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \tag{2}$$

donde $y(x)$ es el apartamiento de la posición de equilibrio a la distancia x del extremo fijo, d es el diámetro de la varilla y L es la distancia desde el punto de fijación hasta la posición donde se aplica la fuerza F. El desarrollo teórico que lleva a esta expresión se encuentra en R.P. Feynman, Física, Volumen II, 38-9. Este análisis deriva de asumir que $y(0) = y'(0) = 0$, y que la sección transversal de la varilla se mantiene constante durante la deformación, lo cual es razonable para pequeñas deformaciones.

Otra forma de medir la elasticidad del material es analizando las oscilaciones elásticas de un cuerpo producidas por una perturbación mecánica inicial. Análogamente a como la constante elástica de un resorte determina la frecuencia de oscilación de una masa unida al mismo, el módulo de Young del material, junto con la densidad y dimensiones espaciales, y los vínculos mecánicos del problema determinan los modos de oscilación de un cuerpo.

Considerando la misma varilla en voladizo de la figura 2a, si $y(x,t)$ representa el apartamiento de la posición de equilibrio vertical, en una posición horizontal x a un tiempo t, la forma más general de escribir el movimiento de la varilla es:

$$y(x,t) = [A\cos(k_n x) + B\cosh(k_n x) + C\sin(k_n x) + D\sinh(k_n x)\,]\sin(\omega_n t + \varphi_0)e^{-\alpha t} \tag{3}$$

donde k_n (que tiene unidades de 1/longitud) define el modo espacial de oscilación, el cual tiene asociada una frecuencia angular de oscilación $\omega_n = 2\pi f_n$. k_n y ω_n están vinculadas a través de la relación de dispersión:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\mathrm{IE}}{\rho} k_n^4 - \alpha^2} \tag{4}$$

donde ρ es la densidad lineal de la barra (masa por unidad de longitud), I es el momento de inercia "seccional" que para un cilindro de diámetro d es: $\mathrm{I} = \pi d^4/64$, y α es una constante de amortiguamiento que tiene unidades de s^{-1}. Para una varilla con un extremo fijo y el otro libre las condiciones de contorno son:

$$y(0,t) = y'(0,t) = 0 \tag{5}$$

$$y''(L,t) = y'''(L,t) = 0 \tag{6}$$

Las condición (5) especifica que el extremo en $x = 0$ está fijo, y las condición (6) que el extremo en $x = L$ está libre. Aplicando este juego de condiciones a la ecuación (3), se obtiene una expresión que define los modos posibles de flexión de la varilla:

$$\cos(k_n L)\cosh(k_n L) + 1 = 0 \tag{7}$$

Los valores de k_n que satisfacen esta ecuación trascendente determinan los modos de oscilación vertical de la varilla. Los tres primeros (figura 2b) corresponden a: $k_1 = 1.875/\mathrm{L}$, $k_2 = 4.694/\mathrm{L}$, $k_3 = 7.855/\mathrm{L}$.

El desarrollo teórico completo de este problema se puede encontrar en L.D. Landau y E.M. Lifshitz, Theory of Elasticity (Pergamon Press, Oxford, 1959) y en S.C. Hunter, Mechanics of continuous media (J. Wiley & Sons, New York, 1986).

DISPOSITIVO y DESARROLLO EXPERIMENTAL

En esta práctica se registrará la flexión, estática y dinámica, de una varilla en voladizo por métodos ópticos. A partir del análisis de la flexión se determinará el módulo de Young del material. El dispositivo experimental sugerido se muestra esquemáticamente en la figura 4. La varilla se fija en un extremo. Cerca del extremo libre se adhiere una lámina filosa a la varilla, que junto con una segunda lámina filosa fija a la mesa de trabajo y regulable en altura, conforman una rendija cuya apertura será determinada por la flexión de la varilla en ese punto.

Para el caso estático se colgarán distintos pesos conocidos y pequeños en el extremo de la varilla, de modo de producir una flexión elástica. La flexión de la barra se determinará analizando el patrón de difracción de Fraunhofer generado por un haz láser al pasar por la rendija. La intensidad del patrón de difracción de campo lejano es de la forma:

$$I(\theta) = \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi h}{\lambda} \sin\theta\right)}{\frac{2\pi h}{\lambda} \sin\theta} \right]^2 \tag{8}$$

donde θ es el ángulo desde la rendija al plano de observación, h el tamaño de la rendija y λ la longitud de onda de la radiación. Varíe F y obtenga E a partir de un ajuste usando la relación (2).

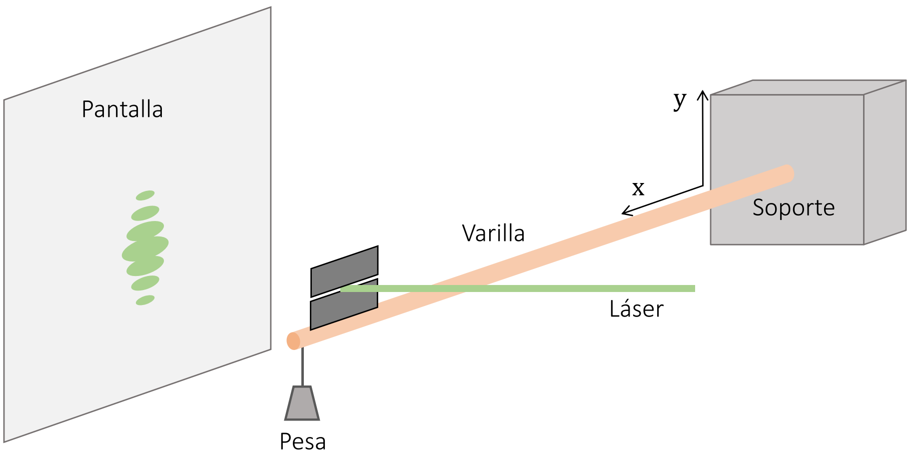

Figura 4. Esquema del dispositivo experimental.

Para el método dinámico, se modifica el arreglo experimental con el objetivo de registrar la amplitud de oscilación de la varilla en función del tiempo, luego de una deformación inicial. Para este fin se usará un fotodiodo para que registre la cantidad de luz que atraviesa la rendija mientras la varilla oscila. El haz de iluminación debe adaptarse de modo que el fotodiodo entregue una señal proporcional a la amplitud de oscilación de la varilla.

Si se aplica a la varilla una deformación elástica vertical, y luego se la deja libre, la varilla tenderá a oscilar en su modo fundamental ($n = 1$). Analice las oscilaciones, y obtenga el módulo de Young mediante las ecuaciones (3) y (4). En la tabla 1 se muestran valores típicos de módulo de Young de distintos materiales.

Material	E [GPa]	Material	E [GPa]
Aluminio	71	Acero	210
Bronce	110	Grilón	1,5 – 3,8
Vidrio	40 – 90	Teflón	0,4 – 0,6
Cobre	123	Acrílico	2,2 – 2,4

Tabla 1. Módulo de Young de diferentes materiales.

ALGUNAS PREGUNTAS A RESPONDER DURANTE LA PRÁCTICA E INCLUIR EN EL INFORME:

- ¿Qué ventaja puede tener medir la flexión de la varilla mediante el patrón de difracción?
- ¿Cuáles son las hipótesis de trabajo para que la aproximación de difracción de Fraunhofer sea válida?
- Obtenga más puntos para el ajuste estático variando la posición donde se aplica F. ¿Es necesario modificar la relación (2)?
- ¿Cómo conseguir que el fotodiodo entregue una señal proporcional a la amplitud de oscilación de la varilla?
- ¿Cómo asegurarse que la frecuencia de muestreo es apropiada para registrar fielmente las oscilaciones?
- ¿Qué sucede si la frecuencia de muestreo no es la apropiada? Demuéstrelo adquiriendo datos a distintas frecuencias y/o re-muestreando datos adquiridos.
- ¿Cómo puede perturbarse a la varilla para excitar modos superiores de oscilación?

PREGUNTAS PARA EL MINI EXAMEN PREVIO A LA PRÁCTICA:

1- Grafique una curva típica de tensión-deformación e identifique las distintas etapas.
2- ¿Qué es el módulo de Young de un material isotrópico?
3- ¿Qué es el módulo de Young de un material anisotrópico?
4- ¿Qué significa que un material tenga un módulo de Young grande o pequeño?
5- Describa qué es un material dúctil, frágil, rígido y duro.
6- ¿El módulo de Young es el mismo en tracción y en compresión? ¿Por qué?
7- ¿Depende el módulo de Young de la temperatura?
8- ¿Qué es la eficiencia cuántica de un fotodiodo?
9- ¿Qué es la responsividad de un fotodiodo?
10- Explique la operación de un fotodiodo en modo fotovoltaico y en modo de fotocorriente.