

# Análisis del campo de velocidades alrededor de un vórtice en fluidos viscosos

Francisco Blanco  
fmblanco@live.com.ar

Juan Manuel Pérez Ipiña  
jmperezipinia@gmail.com

Sabrina Zacarías  
sabrinamzacarias@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

7 de julio de 2015

## Resumen

*En este trabajo se presenta un método alternativo al utilizado por grupos anteriores para estudiar el campo de velocidades alrededor de un vórtice. Se usó polvo blanco perlado para representar las trayectorias de las partículas de fluido y se utilizó la técnica PIV para recolectar los datos. Se repitió el experimento a distintas viscosidades para ver la aplicabilidad de los modelos de Rankine y Burgers. Se encontró que bajo nuestras limitaciones técnicas, el modelo de Burgers ajustó con mayor confianza en todos los casos. También se caracterizó el perfil del vórtice y se ajustó con una función encontrada en la bibliografía, obteniendo un  $R^2 = 0,99$ .*

## 1. Introducción

El objetivo del trabajo es presentar una forma alternativa para caracterizar un fluido viscoso en presencia de un vórtice. Para analizar el campo de velocidades, grupos anteriores utilizaron el siguiente método experimental: filmaban una partícula de telgopor de aproximadamente 0.5 cm de diámetro y analizaban los cuadros de la filmación con un programa escrito por alumnos del curso en Matlab [1]. Para lograr un buen contraste se pintaba la bola de negro y se mezclaba el agua con leche en polvo.

Se decidió encarar el experimento desde una nueva perspectiva ya que el método anterior tenía algunos problemas. En primer lugar, no era posible analizar el campo de velocidades de las partículas de fluido sino que se estudiaba el movimiento de una partícula física de dimensiones no despreciables. Es decir que no podía considerarse que los datos obtenidos representaran fielmente el campo de velocidades. Por otro lado, cuando la partícula se hallaba cerca del vórtice resultaba imposible seguirla por la cámara debido a la velocidad adquirida en esa zona. Además, al llegar al centro del vórtice, la partícula caía dentro de éste, por lo que faltaban datos en las zonas de mayor importancia.

Por esto, se buscó un método de análisis de imágenes alternativo. En la siguiente sección se explica como funciona este nuevo acercamiento al estudio de la vorticidad.

### 1.1. Particle Image Velocimetry

El *Particle Image Velocimetry* (PIV) es un método capaz de calcular magnitudes típicas de un fluido como el campo de velocidades o la vorticidad. Este consiste en filmar el flujo estudiado y analizar la evolución de cada cuadro de la filmación. Para hacer esto correctamente es necesario utilizar partículas trazadoras cuyo movimiento se asemeje al de una partícula de fluido. Además, es necesario filmar el flujo estudiado con una velocidad de disparo y resolución en píxeles adecuada para obtener datos con precisión tanto temporal como espacial. También puede ser necesario utilizar algún pigmento para mejorar el contraste entre las partículas trazadoras y el fluido. Es fundamental que todos estos elementos no cambien las propiedades del fluido.

Para analizar las filmaciones se utilizó un programa de Matlab llamado PIVlab [2]. Este programa divide cada cuadro de la filmación en zonas más pequeñas y realiza la correlación cru-

zada de cada una de estas con las del cuadro posterior. De esta forma determina la velocidad de las partículas de fluido. Para más información ver el apéndice del PIVlab en la sección 4.

## 1.2. Vórtices

La vorticidad es una magnitud que cuantifica la rotación local de una partícula de fluido alrededor de su propio eje. Formalmente está definida como

$$w = \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (1)$$

donde  $\vec{u}$  es el campo de velocidades del fluido. La ecuación de Navier-Stokes que describe la dinámica de un fluido de viscosidad  $\nu$ , está dada por

$$\frac{D\vec{w}}{Dt} = \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{w} \quad (2)$$

En particular serán de interés dos modelos que describen el campo de velocidades de un fluido: el modelo de *Rankine* y el modelo de *Burgers*.

El modelo de Rankine [3] supone que la vorticidad se encuentra uniformemente distribuida en un cilindro de radio  $c$  centrado en el eje del vórtice y que el fluido es ideal, es decir, de viscosidad nula. Si se utilizan coordenadas polares  $(r, \theta, z)$  centradas en el eje de rotación del vórtice (eje  $z$ ), la velocidad tangencial del fluido es solo función de la distancia radial a dicho eje y la vorticidad:

$$v_\theta(r) = \begin{cases} \Omega r & \text{si } r < c \\ \frac{\Omega c^2}{r} & \text{si } r > c \end{cases} \quad (3)$$

Siendo  $c$  el radio del vórtice y  $\Omega$  es una constante. Las componentes radiales y azimutales son nulas.

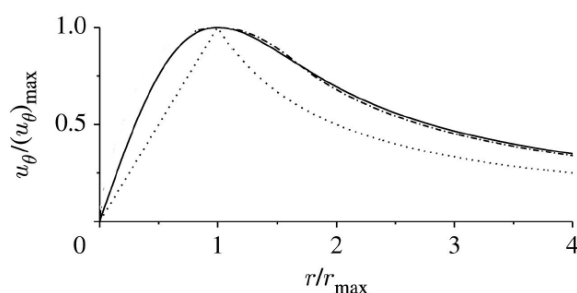
En este caso, la vorticidad toma la forma de una función escalón

$$w = \begin{cases} \Omega & \text{si } r < c \\ 0 & \text{si } r > c \end{cases} \quad (4)$$

Por otro lado, el modelo de Burgers [4] describe fluidos reales (es decir, con viscosidad  $\nu > 0$ ). En este caso, las componentes de las velocidades están dadas por:

$$\begin{aligned} v_r(r) &= -\frac{2\nu}{c^2} r \\ v_\theta(r) &= \frac{\Omega c^2}{r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{c^2}}\right) \\ v_z(z) &= \frac{4\nu}{c^2} z \end{aligned} \quad (5)$$

Un gráfico de ambas funciones puede verse en la figura 1. Puede observarse que en Burgers (línea continua) la velocidad varía más suavemente con el radio, mientras que en Rankine (línea punteada) el cambio es muy abrupto.



**Figura 1:** Curvas características del modelo de Rankine y de Burgers

En cuanto a la vorticidad, ésta adquiere la forma

$$w = \frac{\alpha \Gamma}{4\pi\nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{4\nu}} e_z \quad (6)$$

Donde  $\alpha$  es una constante y  $\Gamma = \pi c^2 \Omega$  es la circulación de la velocidad.

En este trabajo se analizaron las componentes tangenciales de la velocidad ajustando con ambos modelos para compararlos.

Luego se analizó la forma del vórtice, el cual corresponde a uno *libre estacionario* [5], el cual puede modelizarse según la ecuación

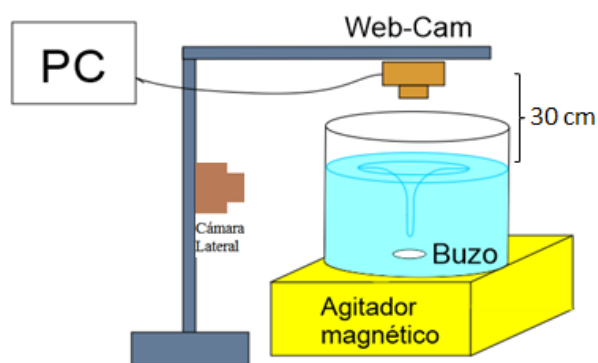
$$z(r) = z_\infty - \frac{w_0 c^4}{2gr^2} \quad (7)$$

Donde  $z_\infty$  corresponde a la altura del fluido lejos del eje de rotación;  $w_0$  es la velocidad angular que genera el buzo en el fluido;  $c$  es el radio característico del vórtice y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

## 2. Dispositivo experimental

Un esquema del dispositivo experimental utilizado se puede observar en la figura 2. Se utilizó un agitador magnético *Decalab-FBR*, el cual actúa sobre una barra imantada (*buzo*) dentro de un recipiente de 14,5cm de diámetro con agua. Cabe destacar que es preferible usar un recipiente lo más ancho posible para desprestigiar los efectos de borde. La dimensión del recipiente utilizado en nuestra experiencia fue suficiente para considerarlos despreciables.

Luego el buzo comienza a girar con una frecuencia regulable con el agitador y esto provoca la generación de un vórtice en el fluido. A 30cm de la superficie del fluido se ubicó una cámara web de 24fps con la cual se filmó el experimento. Las filmaciones se adquirieron con el programa *Image Acquisition* de Matlab; luego fueron transformadas a imágenes utilizando el programa *Image J* y finalmente éstas fueron analizadas con el programa *PIVlab* para Matlab.



**Figura 2:** Esquema del dispositivo experimental.

Las partículas de fluido se simularon utilizando pigmento perlado blanco marca Van Rossum. Este polvo tiene la particularidad de reflejar la luz de forma tal que, al filmar, hacer un seguimiento de las partículas resulta muy fácil. Para mejorar el contraste entre estas partículas brillantes y el fluido se buscó algún pigmento negro que, de acuerdo a lo expresado en la sección 1.1, no alterara las propiedades del sistema. Para esto se utilizó anilina negra, también Van Ros-

sum. Es importante destacar que grupos anteriores utilizaban tinta china, la cual tiene aceites en su composición y puede alterar las propiedades del fluido, como la tensión superficial o la homogeneidad del líquido.

Se utilizó agua destilada como líquido de base y se agregó glicerina para aumentar la viscosidad, de acuerdo a lo tabulado en tablas [6]. Esta elección se debió a que no se sabía como se iba a comportar el agua común dada su concentración en sales y su mayor viscosidad. Otro aspecto importante para el montaje experimental es la iluminación. El polvo utilizado funciona bien como partícula de fluido solo si hay una buena iluminación para detectarlo. Por otro lado, una iluminación excesiva o mal distribuida puede generar reflejos indeseados en el fluido que reducen las zonas de análisis. Por último, en todo momento se utilizaron frecuencias tales que la superficie libre del fluido pudiera considerarse aproximadamente plana.

Se analizaron imágenes provenientes de fluidos con diferente viscosidad (en todos los casos se trató de agua mezclada con diferentes proporciones de glicerina) y a cada uno de estos fluidos se los sometió a cuatro velocidades diferentes del buzo. Debido a la baja resolución temporal de la cámara (24fps) y a que la mínima velocidad adquirida por el fluido debido al movimiento del buzo no era captada correctamente, no se pudo realizar una medición sólo con agua en el recipiente. Se aconseja utilizar una cámara de mayor resolución para poder trabajar a altas velocidades y evitar esta clase de inconveniente.

Luego se analizó el perfil de un vórtice ubicando la cámara en la posición lateral, como se observa en el esquema. Para esta experiencia se utilizó agua destilada, libre de pigmentos y de micropartículas. Se tomaron los perfiles de vórtices generados a distintas frecuencias del buzo y se los analizó con el programa *GrabIt* [7].

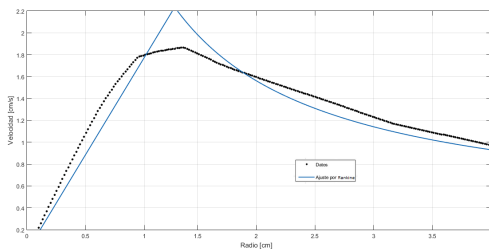
## 3. Resultados y análisis

### 3.1. Baja viscosidad

Debido a las limitaciones técnicas comentadas en la sección 2 se debió usar una muestra de agua con 30 % de glicerina, como fluido de menor

viscosidad. Esto corresponde a una viscosidad cinemática de  $\nu = 3,2 \frac{mm^2}{s}$  [6].

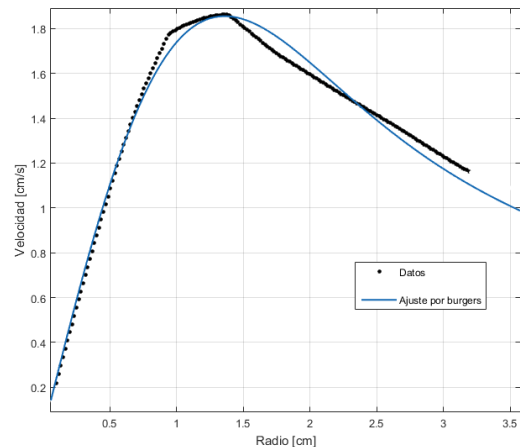
Con esta viscosidad, se usó el agitador a la menor frecuencia apreciable y se filmó el movimiento de las 'partículas de fluido'. Se analizaron los datos en el PIVlab y se extrajeron ciertos gráficos de interés. En la figura 3 se observa la velocidad tangencial en función del radio para este régimen.



**Figura 3:** Ajuste de Rankine para baja viscosidad.

Sobre estos datos se ajustó con el modelo de Rankine según la ecuación 3, devolviendo un  $R^2 = 0,88$ . Se tomó la mínima división del dispositivo experimental como error, es decir, se tomó la longitud de un pixel ( $0,024cm$ ) como error para las distancias y el tiempo entre dos cuadros contiguos de la filmación ( $41,6ms$ ) como error para los tiempos. Estos errores son los que se tomaron para el resto de los gráficos. Se decidió no graficarlos para no dificultar la visualización de los datos.

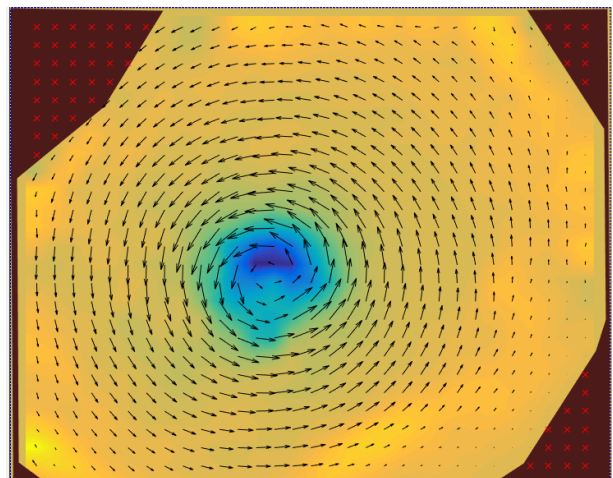
Como puede verse en la figura, el ajuste no fue satisfactorio. Por eso se decidió ajustar con Burgers, bajo la hipótesis de que quizás el fluido era demasiado viscoso para poder utilizar el modelo ideal de Rankine. Los resultados se pueden observar en la figura 4.



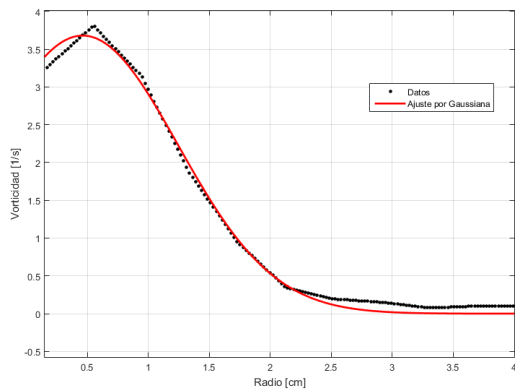
**Figura 4:** Ajuste de Burgers para baja viscosidad.

Este ajuste dio un  $R^2 = 0,95$ , por lo que se tiene más confianza en éste que en el anterior. Esto puede deberse a que Rankine no tiene en cuenta la viscosidad, que es un problema ya que se trabajó con un porcentaje de glicerina no despreciable. Sin embargo, por lo que se explicó anteriormente no se podía armar una muestra menos viscosa para corroborar esta hipótesis.

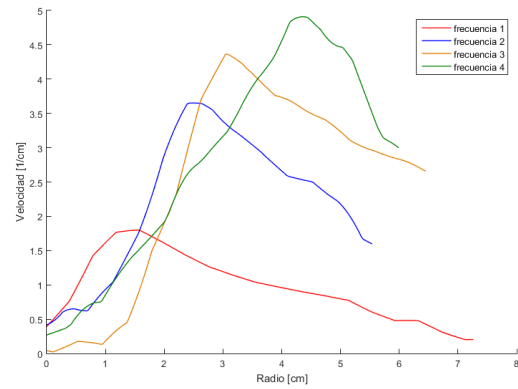
También se analizaron datos de la vorticidad en el fluido. En la figura 5 se puede ver la vorticidad en un esquema de intensidad por colores, y en la figura 6 un gráfico de la vorticidad en función del radio.



**Figura 5:** Vorticidad en el fluido, a baja viscosidad.



**Figura 6:** Vorticidad en función del radio para baja viscosidad.



**Figura 7:** Velocidad en función del radio para distintas frecuencias del agitador magnético.

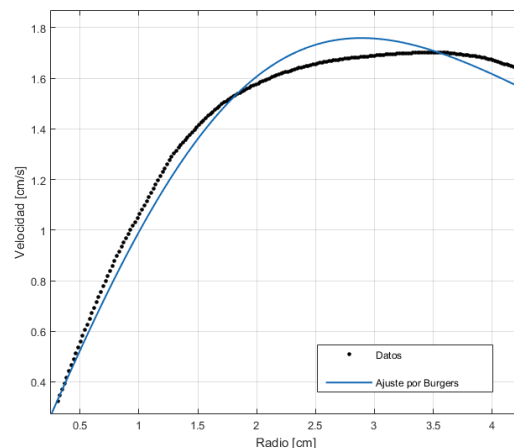
Como puede verse en la figura anterior, tanto la velocidad máxima como el radio característico del vórtice crecen a medida que se aumenta la frecuencia de giro.

### 3.2. Alta viscosidad

Luego se hizo una medición a alta viscosidad, con 50 % de glicerina, lo que corresponde a  $\nu = 7,3 \frac{mm^2}{s}$  [4]. Nuevamente se realizó una medición a baja frecuencia para graficar la velocidad tangencial en función del radio. Los resultados se observan en la figura 8.

En la figura 5 se puede ver cómo la vorticidad está fuertemente localizada en el centro (la ubicación del vórtice) lo cual está en concordancia con el modelo teórico de Rankine. Sin embargo, como puede verse en la figura 6 la vorticidad no se distribuye como una función escalón. Por esto, se decidió ajustar por el modelo de Burgers (ecuación 6) obteniéndose un  $R^2 = 0,99$  y un ancho de  $(1,01 \pm 0,02)cm$ . Esto es coherente con lo dicho anteriormente sobre las limitaciones del modelo de Rankine.

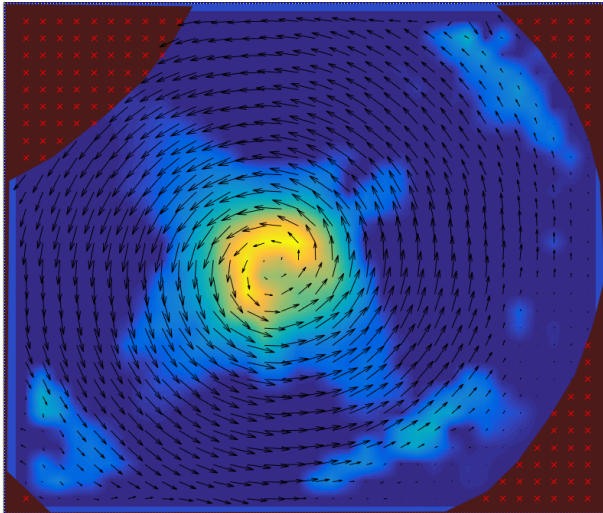
Por otro lado, se intentó caracterizar la dependencia de los parámetros del flujo con la frecuencia de giro del buzo. Para esto se graficó la velocidad en función del radio para distintas frecuencias (siempre con la misma viscosidad). Los resultados pueden verse en la figura 7



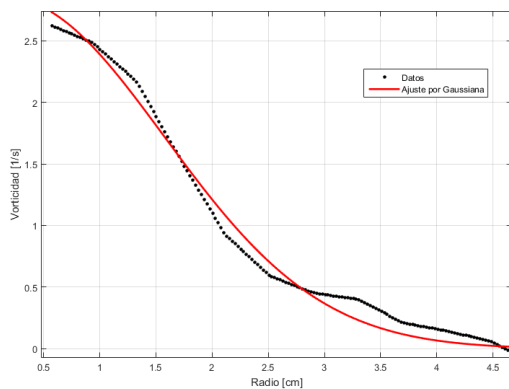
**Figura 8:** Ajuste de Burgers para alta viscosidad.

Los datos se ajustaron por el modelo de Burgers dando un  $R^2 = 0,98$ . En este gráfico puede verse como la velocidad varía más suavemente que en el de baja viscosidad. Es decir que el modelo de Burgers ajusta mejor a medida que la viscosidad aumenta.

Nuevamente se recolectaron datos de la vorticidad en el fluido, y como función del radio, como se observa en la figuras 9 y 10.



**Figura 9:** Vorticidad en el fluido, a alta viscosidad.



**Figura 10:** Vorticidad en función del radio para alta viscosidad.

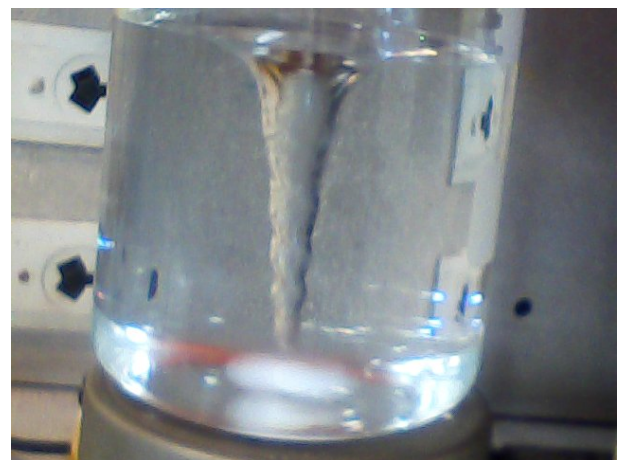
En la figura 9 puede verse cómo la vorticidad se encuentra mucho menos localizada que en el fluido de baja viscosidad. Esto puede deberse, como se vio en la sección 1.2, al hecho de que en

los fluidos viscosos la vorticidad se distribuye de forma gaussiana alrededor del eje de rotación.

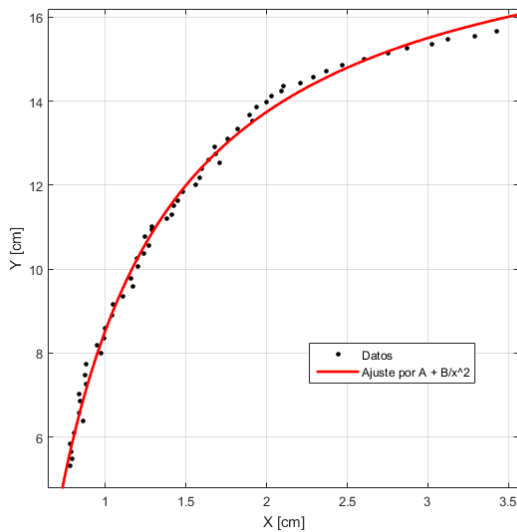
Se ajustó la vorticidad en función del radio por la ecuación 6. Los datos ajustaron con un  $R^2 = 0,98$  y un ancho de  $(1,98 \pm 0,03)cm$ . Este ancho es el doble que en caso de baja viscosidad. Esto puede deberse al hecho de que a medida que la viscosidad baja, la vorticidad se localiza más dentro del radio predicho por el modelo de Rankine.

### 3.3. Perfil del vórtice

También se filmó el perfil del vórtice para ver si la función encontrada en la bibliografía citada ajustaba a la forma encontrada. Se analizaron algunos frames individuales con un código de Matlab [7]. En las figuras 11 y 12 se observa una imagen del video y su respectivo análisis de datos.



**Figura 11:** Frame individual de la filmación del perfil del vórtice.



**Figura 12:** Análisis del perfil del vórtice.

Los datos fueron ajustados con la ecuación 7. El ajuste devolvió un  $R^2 = 0,99$ , por lo que se concluye que se tiene confianza en que el modelo propuesto ajusta los datos.

## 4. Conclusiones

Comparando con trabajos anteriores que hicieron uso de la técnica del telgopor, se encontró que este método es mucho más eficiente y ofrece resultados más satisfactorios. Principalmente porque se pudo analizar el campo de velocidades para radios pequeños, es decir, cerca del vórtice (donde la pelota de telgopor caía antes de dar una vuelta). Además de poder obtener un perfil de velocidades completo, el uso del programa PIVlab permite extraer información sobre la vorticidad del flujo, lo que resultaba imposible en técnicas anteriores.

Se pudo analizar el campo de velocidades alrededor del vórtice para distintas viscosidades. Debido a limitaciones técnicas, se cree que no fueron alcanzadas las condiciones ideales para aplicar el modelo de Rankine. Por esta razón se cree que el modelo de Burgers ajustó ambos experimentos con mayor confianza. Esto se vio tanto en las velocidades como en las vorticidades. Sin embargo, sí se pudieron ver cualitativamente los efectos de haber aumentado la viscosidad.

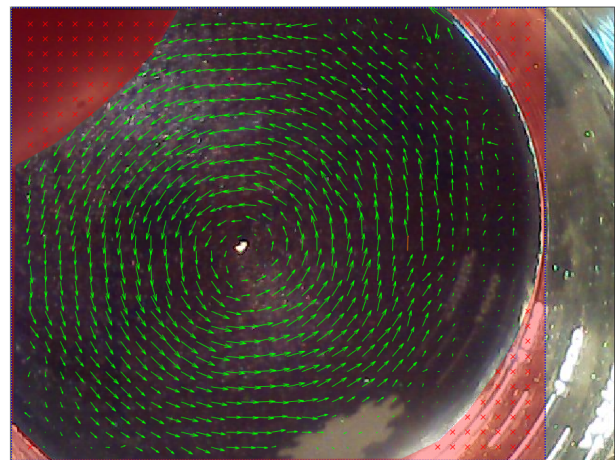
Principalmente la velocidad en función del radio se suavizó y el vórtice se deslocalizó.

Se pudo caracterizar el perfil del vórtice y ajustar por la función encontrada en la bibliografía. Este ajuste otorgó un  $R^2 = 0,99$ , por lo que se tiene confianza en que el modelo ajusta los datos recolectados.

## Apéndice: PIVlab

PIVlab es un programa de Digital Particle Image Velocimetry (DPIV). Un Análisis DPIV consiste principalmente en tres pasos: Pre-procesamiento de imágenes, análisis de imágenes y post-procesamiento.

El Pre-procesamiento consiste en determinar el área de interés de las imágenes. En la figura 13 se puede ver como se descartaron las zonas donde no había fluido o simplemente había brillos indeseados. En el post-procesamiento, en cambio, se filtran los resultados insatisfactorios y se puede realizar un tratamiento estadístico de los datos para obtener valores medios.



**Figura 13:** Captura del funcionamiento del programa PIVlab.

La parte más importante del análisis DPIV es el análisis de las imágenes. Para realizarlo se utiliza un algoritmo de correlación cruzada. Se crean pequeñas sub-imágenes en un par de imágenes (dos cuadros contiguos de la filmación) y se realiza la correlación entre cada una de ellas para obtener el desplazamiento más probable de cada partícula de fluido.

La correlación cruzada es una técnica estadística de búsqueda de patrones que intenta encontrar la "forma" de las partículas en la sub-imagen A de vuelta en la sub-imagen B. Esta técnica es implementada con la función de correlación cruzada discreta:

$$C(m, n) = \sum_i \sum_j A(i, j)B(i - m, j - n) \quad (8)$$

Donde A y B son las sub-imagenes correspondientes a las imágenes A y B de la filmación y los índices  $i$  y  $j$  representan a la sub-imagen en la  $i$ -ésima fila y en la  $j$ -ésima columna.

La ubicación del pico en la matriz de correlación resultante  $C$  da el desplazamiento más probable de partículas de A a B.

## 5. Referencias

- [1] Barlari, Martín; Perez Ipiña, Ignacio (2015): *Medición del campo de velocidades tangencial de un vórtice en un medio cilíndrico y estudio de su superficie libre*. Laboratorio V, FCEN, UBA.
- [2] Thielicke, W. and Stamhuis, E.J. (2014): *PIVlab – Towards User-friendly, Affordable and Accurate Digital Particle Image Velocimetry in MATLAB*.
- [3] James A. Fay (1998): *Introduction to fluid mechanics*. MIT: segunda edición. p. 495.
- [4] G.K. Batchelor (1973): *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge. p.173.
- [5] F.J. Manjón, J.M. Villalba et al (2013): *Vórtices no estacionarios en un vaso de agua*. Revista Brasileira de Ensino de Física - vol.35. p. 5. (2013)
- [6] J.B. Segur y H.E. Obserstar. *Viscosity of Glycerol and its aqueous solutions* Ind. Eng. Chem., 1951, 43 (9)
- [7] <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/7173-grabit>